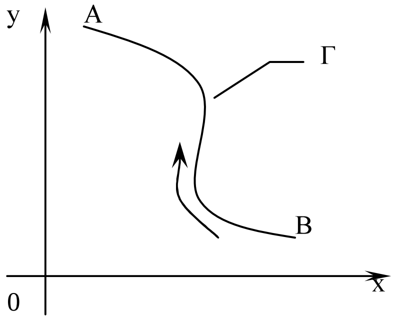
Лекция 4

Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть в некоторой области D на плоскости *xOy* задана кусочно-гладкая непересекающаяся кривая *AB* (контур Г). Предположим, что на этом контуре известна функция комплексного переменного $F(t)$, где t – комплексная переменная, меняющаяся вдоль Г.



Рассмотрим, как в общем случае задается эта функция. Запишем уравнение контура Г в виде:

$$\Phi(x,y)=0$$

С использованием формул

$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$$

$$y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

найдем

$$\Phi(z,\overline{z})=0 \Rightarrow \overline{z}=\overline{z}(z)$$

Рассмотрим некоторую произвольную функцию $f(z,\overline{z})$. Тогда для точек контура Г можно записать:

$$f(t,\overline{t})=f(t,\overline{t}(t))=F(t)$$

В общем случае функция $f(z,\overline{z})$ не удовлетворяет условиям Коши-Римана, и вид функции $F(t)$ зависит от того, где проходит контур Г. Если же функция $f(z,\overline{z})$ голоморфна (удовлетворяет условиям Коши-Римана) в области D и, следовательно, представима в виде $f(z)$, то $F(t)\equiv f(t)$.

Определим интеграл от функции комплексного переменного формулой

$$I=\int_\Gamma F(t)dt=\int_\Gamma (u+iv)d(x+iy)=\int_\Gamma [udx-vdy+i(vdx+udy)]=\int_\Gamma (udx-vdy)+i\int_\Gamma (vdx+udy)$$

Интеграл от функции комплексной переменной сводится к двум криволинейным интегралам от двух действительных функций u и v.

Связность области

Рассмотрим на плоскости *xOy* некоторую область D, ограниченную замкнутым непересекающимся контуром L. Если этот контур можно, деформируя его, стянуть в точку, то такая область называется односвязной, в противном случае – многосвязной.

Теорема Коши

Пусть в односвязной области D задана голоморфная функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции не зависит от пути интегрирования (если тот не выходит за пределы области D).

Доказательство:

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i\int_{\Gamma} (vdx + udy)$$

Для того чтобы выражение в первых скобках было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Таким образом, выполнение условий Коши-Римана является необходимым и достаточным условием того, что функция является полным дифференциалом.

$I = \int_{\Gamma} dU + i\int_{\Gamma} dV = U_B - U_A + i(V_B - V_A) = \Phi(z_B) - \Phi(z_A)$, где $\Phi = U + iV$

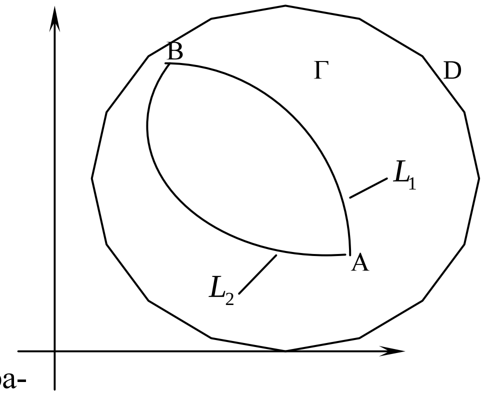
Следствия теоремы:

1. $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$, *где* $f(t)$ *– голоморфная функция.* $z_0 \equiv A$, $z \equiv B$, t *– координаты точек контура Г. Из теоремы Коши следует, что функция* $\Phi(z)$ *также голоморфная, причем,* $f(z) = \Phi'(z)$.

2. $f(z)$ *– функция, голоморфная в некоторой области D.*

Пусть Г замкнут. Тогда интеграл вдоль Г

$$\int_{\Gamma} f(t)dt = 0$$



Доказательство:

Выберем на Г две точки A и B.

$$I = \int_{AB} f(t)dt = \int_{L_1} f(t)dt = \int_{L_2} f(t)dt = -\int_{BA} f(t)dt$$

$$\int_{\Gamma} f(t)dt = \int_{AB} f(t)dt + \int_{BA} f(t)dt = 0$$

Рассмотрим случай, когда контур Г совпадает с граничным контуром области D, причем на этом контуре (контуре L) функция не обязательно голоморфна, но обязательно непрерывна. Она также непрерывно продолжима на контур L из любой внутренней точки области D. Легко показать, что и в этом случае теорема Коши остается справедливой. Для доказательства проведем контур Г так, чтобы он лежал целиком в области D не касаясь граничного контура. Для этого контура выведенная формула безусловно справедлива. Выберем внутри контура Г некоторую точку и будем проводить из нее лучи в произвольных направлениях. Каждый луч пересечет вначале контур Г (обозначим точку пересечения, например, M_1), затем контур L (в точке M_2). Для каждого луча расстояние M_1M_2 будет различным. Пусть $\rho = \sup M_1M_2$. Так как контур Г можно провести сколь угодно близко к контуру L, то можно совершить предельный переход $\rho \to 0$. Так как подынтегральная функция изменяется непрерывно, значение интеграла также будет изменяться непрерывно, что доказывает справедливость теоремы Коши в данном случае.